

SOLUCIÓN CONTROL #2

1. El conocido animador Jugo César (JC) es un opinólogo experto en todo (incluido el bosón de Higgs) y ha sido contratado por un canal de TV para participar en un programa de una hora de duración. JC debe lanzar ideas y desarrollarlas y se sabe que las ideas llegan (misteriosamente) a JC de acuerdo con un PPH $N(t)$ de tasa $\lambda > 0$ (ideas/hora). Se sabe además que cada una de ellas, independientemente de las demás, es genial con probabilidad p_g o mala con probabilidad p_m ($p_g + p_m = 1$). De acuerdo con su contrato, JC debe emitir al menos una idea genial. La calidad de las ideas de JC tienen efecto en el rating, de manera que una idea genial hace que el rating del programa llegue al nivel óptimo (100) pero una idea mala lo hace caer a nivel calamitoso (0). El rating es un proceso continuo que vale 100 mientras JC está desarrollando una idea genial y vale 0 cuando está dando jugo (expresión coloquial que representa el desarrollo de una mala idea). Su valor inicial es 0.

- a) (12 pts.) Calcule la probabilidad de que la primera idea sea genial, sabiendo que JC cumplió el contrato.

sol: Sea X_1^g el instante en que se le ocurre la primera idea genial a JC. Entonces, el contrato se cumple si $X_1^g \leq 1$, puesto que el programa dura 1 hora. Sea X_1^m el instante en que se le ocurre la primera mala idea. Debemos calcular la probabilidad de $X_1^g < X_1^m$ condicional en que se cumple el contrato. Es decir, $P[X_1^g < X_1^m | X_1^g \leq 1]$. Para ello usamos la información de que X_1^m y X_1^g son independientes. Tenemos

$$P[X_1^g < X_1^m | X_1^g \leq 1] = \frac{P[X_1^g < X_1^m, X_1^g \leq 1]}{P[X_1^g \leq 1]} = \frac{P[X_1^g \leq \min\{1, X_1^m\}]}{P[X_1^g \leq 1]}.$$

Por otra parte, el numerador se calcula como

$$\begin{aligned} P[X_1^g \leq \min\{1, X_1^m\}] &= \int_0^\infty P[X_1^g \leq \min\{1, X_1^m\} | X_1^m = t] \lambda p_m e^{-\lambda p_m t} dt \\ &= \lambda p_m \int_0^\infty P[X_1^g \leq \min\{1, t\} | X_1^m = t] e^{-\lambda p_m t} dt \\ &= \lambda p_m \int_0^\infty P[X_1^g \leq \min\{1, t\}] e^{-\lambda p_m t} dt \\ &= \lambda p_m \int_0^\infty P[X_1^g \leq \min\{1, t\}] e^{-\lambda p_m t} dt \\ &= \lambda p_m \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda p_g \min\{1, t\}}) e^{-\lambda p_m t} dt = (1 - e^{-\lambda}) p_g. \end{aligned}$$

Se puede usar el siguiente razonamiento alternativo. Para que se cumpla el contrato y que la primera idea sea buena basta que la primera idea llegue antes de 1 hora (con probabilidad $1 - e^{-\lambda}$) y que ésta sea genial, lo cual ocurre con probabilidad p_g , independientemente de cuando llegó. Es decir, $P[X_1^g < X_1^m, X_1^g \leq 1] = P[X_1^g < X_1^m, X_1 \leq 1](1 - e^{-\lambda})p_g$. Finalmente,

$$P[X_1^g < X_1^m | X_1^g \leq 1] = \frac{(1 - e^{-\lambda})p_g}{1 - e^{-\lambda p_g}}.$$

b) (12 pts.) Calcule la probabilidad de JC cumpla con su contrato.

sol: Sabemos que X_1^g es una va exponencial de parámetro λp_g , luego

$$P[X_1^g \leq 1] = 1 - e^{-\lambda p_g}.$$

c) (12 pts.) Calcule la probabilidad de que más del 50 % de las ideas planteadas por JC sean geniales.

sol: Si $N_g(t), N_m(t)$ designan los procesos de ideas geniales y malas respectivamente, lo que se pide es calcular $P[N_g(1) > N_m(1)]$. Dado que estas variables son independientes Poisson con parámetros respectivos $\lambda p_g, \lambda p_m$, podemos escribir, gracias al condicionamiento,

$$\begin{aligned} P[N_g(1) > N_m(1)] &= \sum_{n=0}^{\infty} P[N_g(1) > n] P[N_m(1) = n]. \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k>n} \frac{(\lambda p_g)^k}{k!} \frac{(\lambda p_m)^n}{n!}. \end{aligned}$$

d) (12 pts.) JC recibe un bono si cumple con el contrato y lanza a lo más una idea mala. Calcule la probabilidad de que reciba el bono.

sol: Para recibir el bono se requiere $N_g(1) \geq 1$ (cumple contrato) y $N_m(1) \leq 1$ (a lo más una idea mala). Considerando que ambas variables son independientes, tenemos

$$\begin{aligned} P[N_g(1) \geq 1, N_m(1) \leq 1] &= P[N_g(1) \geq 1] P[N_m(1) \leq 1] = e^{-\lambda} \sum_{k \geq 1} \frac{(\lambda p_g)^k}{k!} \sum_{n \leq 1} \frac{(\lambda p_m)^n}{n!}. \\ &= (1 - e^{-\lambda p_g}) e^{-\lambda p_m} (1 + \lambda p_m). \end{aligned}$$

e) (12 pts.) Calcule la probabilidad de que el rating se mantenga en nivel óptimo durante todo el programa.

sol: Esto lo interpretamos como la situación en que todas las ideas son buenas, es decir no hay malas, pero hay al menos una buena. En términos de los instantes de las primeras llegadas X_1^g y X_1^m tenemos que calcular $P[X_1^g \leq 1, X_1^m > 1]$, lo cual, debido a la independencia de los procesos N_g y N_m , resulta

$$P[X_1^g \leq 1, X_1^m > 1] = P[X_1^g \leq 1] P[X_1^m > 1] = (1 - e^{-\lambda p_g}) e^{-\lambda p_m}.$$

f) (5 pts.) Calcule el rating por hora esperado del programa (reflexionar y proponer algún análisis).

sol: Notar que el proceso de rating $R(t)$ vale 0 hasta que se produce la primera idea genial. Esto dura un tiempo exponencial de parámetro λp_g . A partir de ese momento $R(t) = 100$ hasta que aparece una idea mala, lo que ocurre después de un tiempo exponencial de parámetro λp_m . De ahí en adelante $R(t) = 0$ hasta la proxima idea genial, la que llega luego de un tiempo exponencial de parámetro λp_g , etc. Entonces, básicamente hay que ver cuantos de estos bloques de exponenciales cuyos parámetros alternan, caben en $[0, 1]$ y multiplicar por 100 y el largo esperado de la parte genial del bloque, que es $1/\lambda p_m$.

2. JC tiene la sana costumbre de visitar a sus N amigos del ambiente de la opinología, de acuerdo con el siguiente proceso. Inicialmente JC está en su casa y después de un tiempo exponencial de parámetro $\lambda > 0$ sale a visitar a un amigo, escogido al azar entre los N . JC permanece visitando a su amigo un tiempo exponencial de parámetro $\mu > 0$ y regresa a su casa, donde vuelve a repetir el esquema descrito. Sea $Z(t)$ la situación (posición) de JC en el instante $t \geq 0$.

- a) (20 pts.) Represente $\{Z(t), t \geq 0\}$ como una CMTC, especificando el espacio de estados E , las tasas v_j, q_{ij} y las probabilidades de transición p_{ij} .

sol: Definimos como 0 la casa de JC y como $1, 2, \dots, N$ a los amigos. Entonces el espacio de estados es $E = \{0, 1, \dots, N\}$. Por otra parte, la tasa de salida de su casa es $v_0 = \lambda$ y la tasa de salida de casa hacia el amigo i es $q_{0i} = \lambda/N$. Finalmente, las tasas de salida desde el amigo i son $v_i = q_{i0} = \mu, i = 1, 2, \dots, N$ (todas las demás tasas q_{ij} son nulas). Las probabilidades de transición están dadas por $p_{0i} = 1/N$ y $p_{i0} = 1, i = 1, 2, \dots, N$ (todas las demás probabilidades p_{ij} son nulas).

- b) (20 pts.) Calcule las probabilidades $P[Z(t) = j]$, para $j \in E, t \geq 0$, a través del planteamiento y resolución de las ecuaciones diferenciales forward de Kolmogorov.

sol: La ecuación forward de Kolmogorov se escribe como

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} P_{ik}(t) q_{kj} - v_j P_{ij}(t).$$

Nos interesamos primero en el caso $i = 0, j = 0$, que se escribe como

$$P'_{00}(t) = \mu \sum_{k \neq 0} P_{0k}(t) - \lambda P_{00}(t) = \mu - (\lambda + \mu) P_{00}(t),$$

cuya solución es

$$P_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}.$$

Para $i = 0, j \neq 0$ tenemos

$$P'_{0j}(t) = \sum_{k \neq j} P_{0k}(t) q_{kj} - \mu P_{0j}(t),$$

equivalente a

$$P'_{0j}(t) = \frac{\lambda}{N} P_{00}(t) - \mu P_{0j}(t),$$

equivalente a

$$P'_{0j}(t) + \mu P_{0j}(t) = \frac{\lambda}{N} \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} \right).$$

Integrando la ecuación anterior llegamos a

$$P_{0j}(t) = \frac{\lambda}{N(\lambda + \mu)} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t}).$$

- c) (20 pts.) Investigue la existencia de probabilidades estacionarias para la cadena Z . Para ello estudie $p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P[Z(t) = j]$ por una parte. Luego plantee el sistema lineal que permite encontrarlas y compruebe que su solución satisface el sistema.

sol: Observamos que

$$p_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} P[Z(t) = 0] = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

y, para $j \neq 0$,

$$p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P[Z(t) = j] = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{0j}(t) = \frac{\lambda}{N(\lambda + \mu)}.$$

Además, se observa que $\sum_{j \in E} p_j = 1$, como debe ser. Por otra parte, sabemos que las probabilidades estacionarias son la solución única del sistema $pR = 0$, con $\sum_{j \in E} p_j = 1$, donde $R = (r_{ij})$ está definida como $r_{ii} = -v_i$, $r_{ij} = q_{ij}$, $i \neq j$. En nuestro caso particular,

$$R = \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{\lambda}{N} & \frac{\lambda}{N} & \cdots & \frac{\lambda}{N} \\ \mu & -\mu & 0 & \cdots & 0 \\ \mu & 0 & -\mu & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu & 0 & 0 & \cdots & -\mu \end{pmatrix}.$$

Se comprueba fácilmente que

$$p = \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}, \frac{\lambda}{N(\lambda + \mu)}, \dots, \frac{\lambda}{N(\lambda + \mu)} \right).$$

es la solución buscada.

- d) (5 pts.) Calcule la proporción de tiempo que JC pasa fuera de casa, en el largo plazo.

sol: Interpretamos las probabilidades estacionarias como frecuencias límite, gracias al teorema ergódico. La proporción de tiempo que JC está fuera de su casa, en el largo plazo, es $1 - p_0 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$.

3. Los amigos de JC tienen humor variable y cada uno de ellos, independiente de los demás y de lo que haga JC, está de buen humor un tiempo exponencial de parámetro α , para luego ponerse de mal humor por un tiempo exponencial de parámetro β y cambiar a buen humor, etc. Inicialmente todos están de buen humor.

Se definen los procesos $H_i(t)$ como el estado de humor del amigo i en el instante t ; $B(t)$ como el número de amigos de buen humor en el instante t y $M(t)$ como número de amigos de mal humor en el instante t .

- a) (10 pts.) Represente a H_i como una CMTC, indicando espacio de estados, tasas y probabilidades de transición.

sol: Consideramos el espacio de estados $E = \{0, 1\}$, donde 1 indica buen humor. Entonces las tasas son $q_{01} = \beta$, $q_{10} = \alpha$. Las probabilidades de transición son $p_{01} = p_{10} = 1$. Este tipo de cadenas fue analizado en el curso.

- b) (10 pts.) Establezca una relación entre los procesos $H_i(t)$, $B(t)$, $M(t)$ y muestre que $\{B(t), t \geq 0\}$ y $\{M(t), t \geq 0\}$ son CMTC, explicitando espacios de estados, tasas y probabilidades de transición.

sol: La relación más interesante que se observa directamente es $B(t) = \sum_{i=1}^N H_i(t)$ y por cierto, $B(t) + M(t) = N$. Por otra parte, es fácil ver que $B(t)$ (y por lo tanto $M(t)$) son CMTC; de hecho ambos son procesos de nacimiento y muerte. En efecto, el espacio de estados es $E_B = \{0, 1, \dots, N\}$ y las tasas de transición son: $\lambda_j = q_{j,j+1} = (N-j)\beta$, $\mu_j = q_{j,j-1} = j\alpha$, para $1 \leq j \leq N-1$. También, $\lambda_0 = q_{01} = N\beta$ y $\mu_N = q_{N,N-1} = N\alpha$. El resto de los q_{ij} son nulos. Por otra parte, notamos que $v_j = \lambda_j + \mu_j$ y las probabilidades de transición no nulas son

$$p_{j,j+1} = \frac{(N-j)\beta}{(N-j)\beta + j\alpha}, \quad p_{j,j-1} = \frac{j\alpha}{(N-j)\beta + j\alpha}.$$

La situación para el proceso $M(t)$ es muy similar, solo hay que cambiar los roles entre buen y mal humor para tener las tasas, lo que equivale a intercambiar α y β . Tenemos: $q_{j,j+1} = (N-j)\alpha$, $q_{j,j-1} = j\beta$, para $1 \leq j \leq N-1$, etc.

- c) (10 pts.) Calcule la probabilidad de que, en el largo plazo, un amigo cualquiera de JC esté de buen humor. (Basta un razonamiento heurístico)

sol: Si consideramos solo la cadena discreta subyacente concluimos que la probabilidad es $1/2$ pero al ser de tiempo continuo debemos corregir multiplicando por el tiempo esperado de permanencia en el estado (de buen humor) que es $1/\alpha$. Entonces $p_1 = K/\alpha, p_0 = K/\beta$ y la suma debe ser 1. Por lo tanto, $p_1 = \beta/(\alpha + \beta)$.

- d) (10 pts.) Calcule la probabilidad de que, en el largo plazo, n amigos de JC estén de buen humor. (Basta un razonamiento heurístico)

sol: Dado que los amigos funcionan independientemente unos de otros, el número de amigos de buen humor (en el largo plazo) es como una suma de n Bernoulli independientes con parámetro $\beta/(\alpha + \beta)$, es decir, $B(t)$ sería asintóticamente binomial con parámetros $N, \beta/(\alpha + \beta)$. O bien, para $0 \leq k \leq N$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P[B(t) = k] = \binom{N}{k} \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta} \right)^k \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)^{N-k}.$$

- e) (10 pts.) Suponga que JC decide visitar sólo a sus amigos de buen humor. Esto es posible porque en todo instante JC tiene información del estado de cualquier amigo. Además, en caso de que todos estén de mal humor, JC se va a la plaza, donde permanece un tiempo aleatorio de igual distribución que las visitas a sus amigos. Si $Z(t)$ es la posición de JC, considere el proceso $N+1$ dimensional $(Z(t), H_1(t), \dots, H_N(t))$ y compruebe que es una CMTC, explicitando estados y tasas.

sol: El espacio de estados del proceso $Z(t)$ contiene ahora un nuevo elemento $(N+1)$ que representa la plaza. Es decir, el espacio de estados es $\{0, 1, \dots, N, N+1\}$. Ahora consideramos un proceso multidimensional $(Z(t), H_1(t), \dots, H_N(t))$ cuyo espacio de estados será el producto cartesiano $\{0, 1, \dots, N, N+1\} \times \{0, 1\}^N$. Designamos por (z, h, i) al vector $(z, h_1, \dots, h_{i-1}, 1, h_i, \dots, h_N)$, indicando que el amigo i está de buen humor y por (z, h, \bar{i}) al vector $(z, h_1, \dots, h_{i-1}, 0, h_i, \dots, h_N)$, indicando que el amigo i está de mal humor. Entonces la tasa de cambio de (z, h, i) a (z, h, \bar{i}) está dada por

$$q((z, h, i), (z, h, \bar{i})) = \alpha \quad y \quad q((z, h, \bar{i}), (z, h, i)) = \beta, \forall i = 1, \dots, N.$$

Notar que las tasas que impliquen a dos o más amigos cambiando de humor simultáneamente son nulas. Veamos ahora las tasas donde Z cambia. Adoptamos la notación (j, h) para designar la vector de estados con $Z(t) = j$. Entonces, $q((j, h), (0, h)) = \mu, \forall j \neq 0, \forall h$, porque desde cualquier amigo o desde la plaza vuelve a casa con tasa μ (estamos suponiendo que si el amigo visitado por JC cambia de humor durante la visita, esto no tiene influencia en la duración de la visita). Las tasas de salida desde 0 (casa) son algo más complejas porque dependen de h como sigue: si no hay amigos de buen humor ($\sum_{i=1}^N h_i = 0$) entonces va a la plaza ($N+1$) con tasa λ . Si hay amigos de buen humor entonces sale con tasa λ de su casa y elige a cualquiera de ellos con igual probabilidad. Esto se resume como sigue:

$$q((0, h), (N+1, h)) = \lambda \mathbf{1}_{\{\sum_{i=1}^N h_i = 0\}}$$

y

$$q((0, h), (j, h)) = \frac{\lambda h_j}{\sum_{i=1}^N h_i} \mathbf{1}_{\{\sum_{i=1}^N h_i > 0\}}, \forall j = 1, \dots, N.$$

Las demás tasas que impliquen cambios de estado simultáneos de JC y del humor de sus amigos, son nulas.

- f) (10 pts.) Indique si en esta situación $Z(t)$ es una CMTC. Explique su razonamiento.

sol: No es CMTC porque las tasas dependen de H_1, \dots, H_N .

g) (10 pts.) Discuta de manera intuitiva si existen o no probabilidades límite $p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P[Z(t) = j]$ y, en caso de existir, que valores podrían tener.

sol: Aunque Z no sea CMTC podemos pensar que el límite exista eventualmente. Un análisis intuitivo plausible es el siguiente: sea $H = (H_1, \dots, H_N)$ el humor de los amigos (en largo plazo), entonces, dado H , la probabilidad de que JC se encuentre en casa es

$$p_{0|H} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

igual a p_0 calculado más arriba porque el número de amigos (de buen o mal humor) no influye en que JC esté en casa o no. Por otra parte, la probabilidad de encontrarse en la plaza es positiva si es que no hay amigos de buen humor, es decir

$$p_{N+1|H} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \mathbf{1}_{\{\sum_{i=1}^N H_i = 0\}}.$$

Finalmente, el resto de las probabilidades se reparten equitativamente entre los amigos de buen humor, es decir

$$p_{j|H} = \frac{\lambda H_j}{(\lambda + \mu) \sum_{i=1}^N H_i} \mathbf{1}_{\{\sum_{i=1}^N H_i > 0\}}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Para concluir descondicionamos, tomando en cuenta que, asintóticamente, los H_i son Bernoulli independientes y $\sum_{i=1}^N H_i$ es binomial de parámetros $N, \beta/(\alpha + \beta)$. Tenemos:

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad p_{N+1} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} P\left[\sum_{i=1}^N H_i = 0\right] = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)^N$$

y

$$p_j = \frac{1}{N} (1 - p_0 - p_{N+1}) = \frac{\lambda}{N(\lambda + \mu)} \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)^N\right).$$

También es posible llegar al valor de p_j notando que los p_j deben ser iguales y que $E[p_{j|H}] = p_j$. Así resulta que

$$\sum_{j=1}^N p_{j|H} = \frac{\lambda \sum_{j=1}^N H_j}{(\lambda + \mu) \sum_{i=1}^N H_i} \mathbf{1}_{\{\sum_{i=1}^N H_i > 0\}} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \mathbf{1}_{\{\sum_{i=1}^N H_i > 0\}}$$

y, tomando esperanza arriba tenemos

$$Np_j = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} P\left[\sum_{j=1}^N H_j > 0\right],$$

de donde se despeja p_j .

Puntuación de cada ejercicio: 60 puntos \Leftrightarrow 7.0 (overflow transferible).

Duración: de 11:30 a 14:00 hrs.

Indicación: La ecuación diferencial $y' + \beta y = f$ tiene como solución

$$y(t) = e^{-\beta t} \left(\int_0^t e^{\beta s} f(s) ds + K \right).$$